

自由空間法を用いた 正確な誘電率測定

Accurate Measurement of Permittivity Using the Free-Space Method

Key-words : Permittivity, Free-space, Angular spectrum method

坂井 了

Ryo SAKAI (National Astronomical Observatory of Japan)

1. はじめに

増幅器やアンテナなどデバイス開発において、設計帯域における誘電材料の特性を正確に把握することは、試作や設計変更の手戻りを防ぐうえで不可欠であり、材料計測技術の重要性は一層高まっている。100 GHzを超える一般に「ミリ波・テラヘルツ波帯」と呼ばれる帯域では、測定方法は共振器法と反射・伝送法に大別される。共振器法は共振器内に試料を装荷し、共振周波数とQ値の変化から誘電率を導出する方法であり、低損失材料の高精度測定に適する。共振器内に装荷するため、誘電体を適した形状（一般的にフィルム形状が多い）と寸法（本帯域では数百 μm 程度が多い）の試料に高精度に加工する必要がある。共振器構造や共振モードに依るが、加工時の寸法・形状誤差に加えて試料の装荷位置や接触状態が測定誤差となり、設置精度や作業条件の管理が重要となる。反射・伝送法は、伝送線路内に試料を設置し、反射・透過信号の振幅と位相から誘電率を導出する方法であり、伝送線路に応じて幾つかの種類がある。反射・伝送法の一つである自由空間法は、自由空間を伝搬する電磁波経路内に試料を設置する。試料を同軸ケーブルや導波管の形状に加工し、内部に装荷する必要がない。非接触測定が可能、試料の形状・寸法誤差、設置誤差や作業由来のばらつきの影響が小さい利点がある。この特徴は、多数の試料を評価する開発の現場において、測定効率や再現性の観点から有用である。反射・伝送法の解析は、測定値と誘電率を変数とした理論値との残差を反復的に最小化し、誘電率を推定する方法が一般的である。しかし、従来の計算モデルは伝送線路の種類に依らず、電磁波伝搬を等価的な次元問題として扱う仮定に基づく¹⁾。自由空間法では厳密にこの仮定が成り立たず、測定系の設計次第では仮定に起因する系統誤差が顕在化する²⁾。本稿ではこの問題を解決する、試料への入

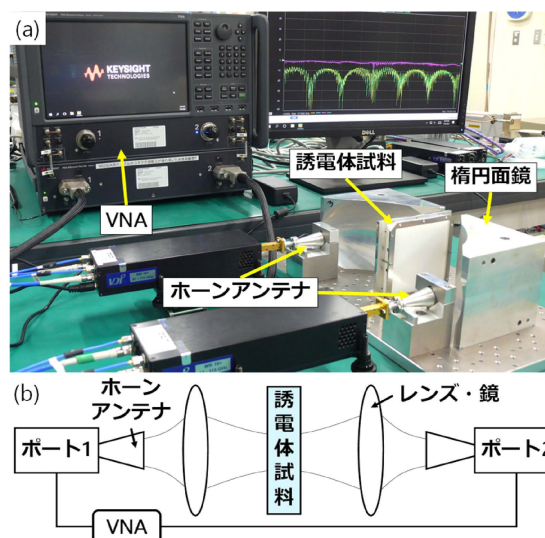


図1 (a)自由空間法の測定系写真(b)測定系の概念図

射電界分布を考慮可能な新たな解析方法を紹介します。

2. 自由空間法の測定系および測定方法

自由空間法で一般的な測定系と測定方法の概要を紹介する。測定系は2つの信号ポートを持ち、周波数を掃引しながら、反射および透過波の振幅と位相を測定する機器（2-port Vector Network Analyzer：以降、VNA）と光学系で構成される。図1(a)に測定系の写真と(b)概念図を示す。光学系はレンズや凹面鏡などの収束素子、導波管と自由空間の伝搬モードを変換し、効率良く電磁波を送受信するためのホーンアンテナで構成される。被測定対象の試料は、事前に適切な開口径、厚さの板状に加工する必要がある。測定値は各周波数測定点における反射・透過波の振幅と位相の情報を有する複素数（Sパラメータ）である。測定はVNAを適切に校正した後に、光学系焦点面に試料を設置する・しない場合の2通りのSパラメータを測定する。空の状態のデータは光学系起因の誤差要因を排除、また、試料ありデータの正規化に使用する。自由空間法では反射・透過特性のいずれか、または両方を解析に用いる方法があるが、今回は透過特性のみを用いる方法を紹介します。

3. 従来の解析における問題と提案法

先述の通り、解析では誘電率を変数として理論値と測定値の残差を目的関数とした最小化問題を解く方法が一般的である。自由空間法の一般的な計算モデル（以降、従来法と呼ぶ）の概念図を図2に示す。電磁波伝搬経路内に、入射方向に対し垂直に平坦かつ一様な境界面を持つ試料が設置されている。以降、入射側界面

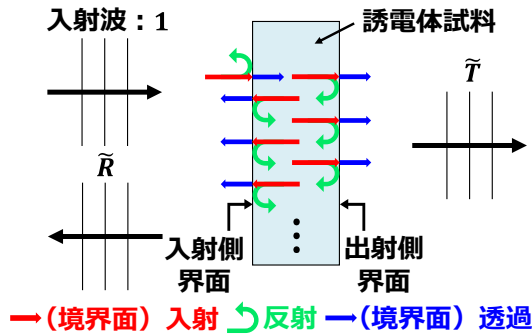


図2 従来法概念図

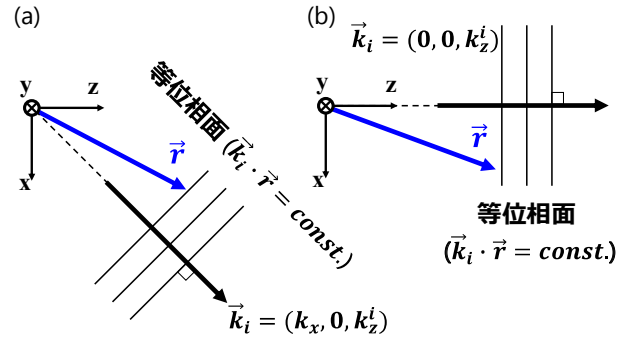


図3 平面波概念図：試料に対し(a)斜入射と(b)垂直入射

が $z=0$ 面となるように座標系を定義する。入射側界面に伝搬した電磁波は、境界面の両側において面内方向の電界・磁界成分の連続条件（マクスウェル方程式から導かれる境界条件、以降、「場の連続条件」と呼ぶ）を満たすように反射波と透過波が生じる。同様の現象は出射側界面においても発生し、両界面で生じる多重反射による干渉波の複素振幅（以降、入射側は \vec{R} 、透過側は \vec{T} と定義）が測定値として検出される。 \vec{T} は図2の幾何モデルから、各界面で生じる反射・透過波の無限等比級数から導出される。なお、誘電体内では真空中と比較して波長が短縮し、実効的な伝搬距離は光路長と呼ばれる。これは、経路長 L と屈折率： $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$ の積で表される。ここで ϵ_r は比誘電率、 μ_r は比透磁率である。 \vec{T} の周波数特性は光路長分の位相差を持つ各境界面での反射・透過波の干渉の明暗が周期的に表れる。従来法は理解し易く、解析ソフトウェアの実装が容易で市販もされている³⁾。一方で、境界面における電磁波と誘電体の相互作用が単一自由度へ縮約可能と仮定する。自由空間法においてこの仮定は、試料へ入射する電磁波が境界平面内で無限に一樣な振幅と位相分布を有する条件に対応する。この理想化は一般に平面波近似と呼ばれる。特にミリ波・テラヘルツ波帯では試料や光学素子の開口径と波長が同程度のオーダーであるため、回折の影響が無視できないことが多い。提案する解析方法（以降、提案法と呼ぶ）は平面波近似誤差を回避する方法である。提案法は大きく3つのステップに分けられる：1. 入射側界面の電界分布をさまざまな伝搬方向の平面波で展開 2. 展開した平面波毎に \vec{T} を計算 3. 各 \vec{T} を足し上げて出射側界面での電界分布を再構成、である。最初に本稿において重要となる“平面波”について述べる。平面波はヘルムホルツ方程式の解の一つであり、異なる方向に伝搬する平面波の線形結合も同方程式を満たす。また、完全性より平面波を基底とした展開を用いて任意の電界分布を記述でき、これはフーリエ展開と類似

の概念として理解できる。 $z=z$ 面における平面波 (Plane wave: PW) の電界分布 $E_{PW}(x, y)$ は以下で表される。

$$E_{PW}(x, y) = E_0 e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} = E_0 e^{-j(k_x x + k_y y)} \cdot e^{-jk_z z} \quad (1)$$

ここで E_0 は複素定数、 j は虚数単位、 $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ は位置ベクトル、 $\vec{k}_i = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}$ は波数ベクトルである。 \vec{k}_i の絶対値は $|\vec{k}_i| = k_i = 2\pi n_i / \lambda_0$ で表される。下付き添字 i は媒質番号を示し、 k_z^i は媒質依存の z 成分である。本稿では、自由空間を媒質 $i=0$ 、試料を媒質 $i=1$ と定義する。なお、 λ_0 は自由空間における波長である。波数 k_i は伝搬方向に沿った“単位長さあたりの位相変化率”を表す物理量である。一方、 \vec{k}_i は平面波の“伝搬方向”を規定する。図3に平面波の概念図を示す。簡単のため $k_y = 0$ として $x-z$ 平面で考える。平面波の等位相面は式(1)の指数部の $\vec{k}_i \cdot \vec{r} = \text{const.}$ を満たす点 r の点群、すなわち \vec{k}_i と直交する平面で表され、空間依存は位相進行のみと理解できる。次に、入射側界面 (Entrance surface: ENT, $z=0$ 面) における電界分布 $E_{ENT}(x, y)$ を次式で表すことを考える。

$$E_{ENT}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{k_x^2 + k_y^2 \leq k_0^2} A_{ENT}(k_x, k_y) \cdot e^{-j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (2)$$

ここで、 $A_{ENT}(k_x, k_y)$ は \vec{k}_0 の関数であり、被積分関数は A_{ENT} と E_{PW} の積である。したがって、式(2)は E_{ENT} をさまざまな伝搬方向の平面波の重ね合わせで表現している。なお、 $|\vec{k}_0| = k_0$ より k_z^0 は k_x, k_y に従属なので積分変数は k_x, k_y の2つである。 A_{ENT} を E_{ENT} の角スペクトルと呼ぶ。角スペクトルは、ある基準面における電界分布を平面波基底に分解した際の複素係数を表す。式(2)は数学的には2次元フーリエ変換と同一構造を持ち、 A_{ENT} は E_{ENT} の逆フーリエ変換により決定される。提案法では最初に E_{ENT} を実測やシミュ

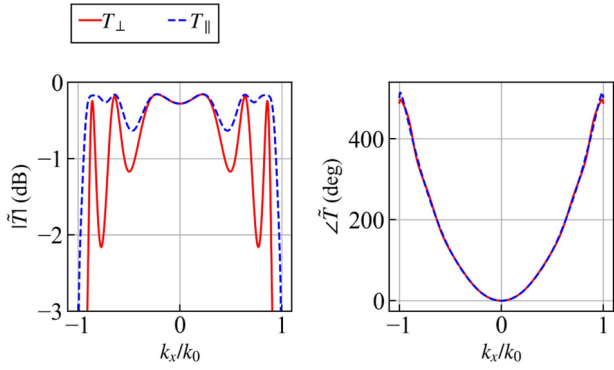


図4 $\tilde{T}(k_x/k_0, 0)$ の (左) 振幅と (右) 位相. \tilde{T}_\perp は E_\perp , \tilde{T}_\parallel は E_\parallel における \tilde{T} を表す. 例として $\epsilon_r = 2 - 0.001j$, $L = 4\lambda_0$ を計算.

レーションで準備する. 次に A_{ENT} を計算し, 各伝搬方向の平面波成分へ展開する. 次に各平面波 \vec{k}_0 における \tilde{T} を計算する. ここで, 斜めに入射する平面波と境界面との相互作用を考える. 反射・透過波の振幅は垂直入射の場合と同様に「場の連続条件」で決定される. しかし, 斜入射では電界・磁界を面内成分と垂直成分に分解し, また, 電界の方向 (偏波) を考慮する必要がある. 本稿では, 入射面を「誘電体の境界面に垂直, かつ \vec{k}_0 を含む平面」と定義する. 電界が入射面に垂直な偏波を E_\perp , 入射面内に存在する偏波を E_\parallel と表す. 境界面における反射・透過係数はこれらの偏波成分に対して異なる値を持つ. 任意の偏波は E_\perp および E_\parallel に分解でき, 各成分の係数を独立に計算した後に重ね合わせ, 一般の偏波状態に対する係数が得られる. これらの関係式はフレネルの式と呼ばれる. 次に光路長を考える. 斜入射では屈折が生じるが, これは境界面内の“任意の位置”における界面両側の位相整合, すなわち, \vec{k}_i の面内成分 (k_x, k_y) の連続条件による. $(k_z^i)^2 = k_0^2 - k_x^2 - k_y^2$ より, 境界面の両側で k_i が異なると k_z^i が変化し, 結果として伝搬方向が変化する. これを幾何的に整理すると媒質の n_i , 入射角・屈折角の関係 (スネルの法則) が導かれる. 境界面間の光路長による位相回転は k_z^1 に依存する. フレネル係数および光路長から, 従来法と同様に両界面における多重反射を計算して, 任意の偏波状態と入射角に対する \tilde{T} が求められる. 図4に \tilde{T} の計算例を示す ($k_y = 0$, 横軸は k_0 正規化). 最後に, 式(3)に示す通り, 各平面波成分の \tilde{T} に対応する重み A_{ENT} を掛け, すべての平面波を足し上げて出射側界面 (Exit surface: EXT, $z = L$ 面) における電界分布 $E_{EXT}(x, y)$ を導出する.

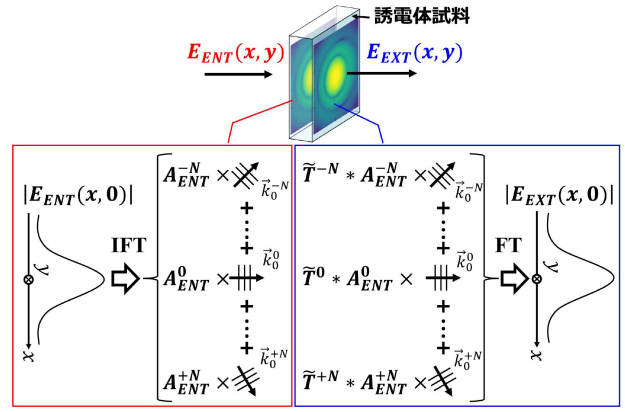


図5 提案法の概念図. 簡単のため $\vec{k}_0^N = (k_x^N, 0, k_z^{0,N})$ の $A_{ENT}^N(k_x^N, 0)$ を A_{ENT}^N , $\tilde{T}_{ENT}^N(k_x^N, 0)$ を \tilde{T}_{ENT}^N と表記.

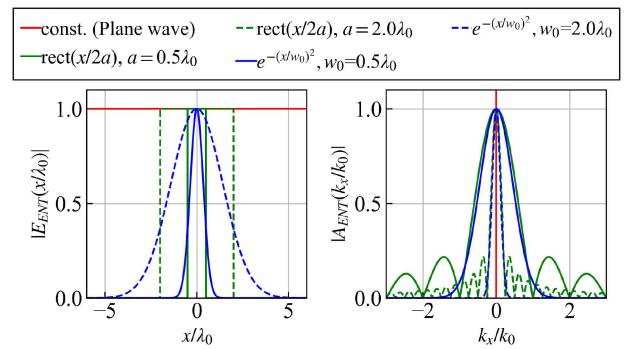


図6 さまざまな E_{ENT} (左) における A_{ENT} (右) の振幅

$$E_{EXT}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{k_x^2 + k_y^2 \leq k_0^2} \tilde{T}(k_x, k_y) A_{ENT}(k_x, k_y) \cdot e^{-j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (3)$$

図5に提案法の概念図を示す. 以上の議論を踏まえると従来法は垂直入射, すなわち $\vec{k}_0 = 0\hat{x} + 0\hat{y} + k_z^0\hat{z}$ における $\tilde{T} = \tilde{T}(0, 0)$ を複素振幅とする単一平面波, $E_{EXT}(x, y) = \tilde{T}(0, 0)$ を仮定していると解釈できる. この条件は, 式(3)より $A_{ENT}(k_x, k_y) \propto \delta(k_x)\delta(k_y)$ を満たす必要がある. ここで, E_{ENT} と A_{ENT} はフーリエ変換対であるため, 対応する電界分布 E_{ENT} は $E_{ENT}(x, y) = \text{const.}$, すなわち平面波である. したがって, 従来法は式(3)において $(k_x, k_y) = (0, 0)$ 以外の成分を無視した近似 (=平面波近似) と解釈できる. しかし, 現実の光学系では有限の開口径によって電界分布が空間的に制限されるため, 平面波近似に起因する誤差は不可避である. 図6にさまざまな入射電界分布 E_{ENT} に対応する角スペクトル A_{ENT} を示す. E_{ENT} の有限性 (開口制限) および空間的局在性 (ビーム収束) は, 波数空間において角スペクトル幅 A_{ENT} の増大を引き起こす. この結果, $\tilde{T} * A_{ENT}$ 積におい

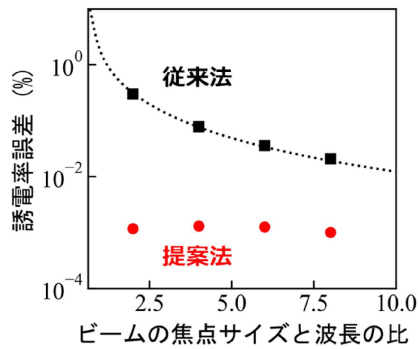


図7 従来法と提案法の解析誤差比較. 原著論文⁴⁾の図を改変

て $(k_x, k_y) = (0, 0)$ 以外の高次波数成分の寄与が無視できなくなる. したがって, 図4および図6(右図)から理解できるように, 開口径およびビーム幅の縮小に伴い回折効果が顕著となり, 平面波近似誤差が増大すると解釈できる.

4. 電磁界シミュレーションによる検証

電磁界解析ソフトウェア⁶⁾を用いて, 従来法と提案法の解析誤差の比較を実施した. 本検証では, 図1(a)の光学系を模した電磁界解析モデルを構築し解析, Sパラメータを出力する. このテストデータに対して, 従来法と提案法を適用し, 誘電率の推定値と電磁界解析設定値との差を解析起因の誤差として評価した. 3章で述べた通り, 試料への実際の入射波が平面波と異なる程, 従来法では近似誤差が大きくなり, 近似度は焦点面のビーム幅と波長の比(以降, スポットサイズと呼ぶ)で評価した^{2), 4), 5)}. 図7にスポットサイズにおける各解析方法の解析誤差の比較を示す. 従来法では, スポットサイズが小さいほど解析誤差が大きくなる. これに対して, 提案法ではスポットサイズに依存せず, 十分小さな解析誤差を示した.

5. おわりに

本稿では, 従来の自由空間法の課題であった平面波近似誤差を回避する解析方法を提案した. 自由空間法は, 1章で述べた通り, 非接触測定が可能であり, 試料の形状・寸法誤差, 設置誤差の影響が小さい特長を

有する. また, 試料の機械的性質からフィルム状やシート状に加工が困難な場合でも対応可能である. さらに, 4章で示したように, 提案法はスポットサイズに依存せず正確な測定が可能である. この特徴を応用して, 敢えて小径スポットサイズとすることで, 従来法や他の測定方法では困難な小径試料を測定可能と考えている. 本稿では, 提案法の定性的理解に焦点を当て, 計算式の厳密な導出および詳細な数式展開については扱わず, また, 実測例には触れなかった. これらについては, 原著論文等^{4), 5)}を参照されたい. 提案法は平面波近似誤差を回避可能な一方で, 光波伝搬を数値的に解くため, 実用上は計算時間が課題である. これに関して, $E_{ENT}(x, y)$ をモデル式化し3章の内容を解析的に書き下すことで, 従来法と同程度の計算時間で平面波近似を回避可能な手法を開発中である. 現在は導出した解析的表示のソフトウェア実装と妥当性の検証を進めている. また, スポットサイズを可変な光学系開発も進めており, 小径試料の測定を実施予定である.

文 献

- 1) J. Baker-Jarvis, et al., *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, **38**[8], 1096-1103 (1990).
- 2) L. E. Rickard Petersson, et al., *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **50**[6], 878-887 (2002).
- 3) <https://www.keysight.com/jp/ja/product/N1500A/materials-measurement-suite.html>
- 4) R. Sakai, et al., *IEEE Trans. Terahertz Sci. Technol.*, **13**[4], 362-372 (2023).
- 5) 坂井 了, “次世代高速・高周波伝送部材の開発動向” 技術情報協会 (2024) pp.265-279.
- 6) TICRA, “TICRA tools version 25.0,” Copenhagen, Denmark, 2026. [Online]. Available: <https://www.ticra.com/software/grasp/>

筆者紹介



坂井 了 (さかい りょう)

2017年 新潟大学大学院自然科学研究科修士課程修了. 同年 自然科学研究機構 国立天文台勤務. 現在, 同 アルマプロジェクト所属. 電波望遠鏡観測装置の研究開発に従事. 特に, ミリ波・テラヘルツ波帯受信機の光学系部品および導波管デバイスの設計・解析・評価が専門. 関心分野は誘電率測定技術およびアンテナ近傍界測定技術.
[連絡先] 〒181-8588 東京都三鷹市大沢 2-21-1 国立天文台 アルマプロジェクト
E-mail: ryo.sakai@nao.ac.jp